

「数値解析入門」補講

齊藤 宣一

東京大学大学院数理科学研究科

norikazu[AT]g.ecc.u-tokyo.ac.jp

Ver. 2024.04.02

更新履歴 (2023.01.08)(2022.04.08)(2021.07.13)(2021.07.05)(2021.06.23)
(2020.06.14)(2018.12.12)(2017.08.04)(2015.01.26)
(2014.10.13)(2014.02.12) (2013.08.27) (2013.08.13)
(2013.07.19)(2013.05.23)(2013.05.15)(2013.04.07)(2012.11.28)
(2012.11.18)(2012.11.02)(2012.10.22)(2012.10.17)

■ はじめに. この文書は, 拙著

数値解析入門 (大学数学の入門 9), 東京大学出版会, 2012 年,
ISBN-13: 978-4130629591, 3,150 円

の内容に関する, 誤植の訂正, 内容の補足説明をまとめることを目的に書かれた, 著者の私的なノートです.

この文書は常に更新されます. 参照の際には十分にご注意下さい. 最新版は下記の URL にあります.

http://www.infsup.jp/saito/materials/na_book_appendix1.pdf

■追記 (2018.12.12): 書評を書いていただきました.

- 桂田祐史: [数学通信, 第 23 巻, 第 2 号](#)
- 高安亮紀: [JSIAM Online Magazine Article: J1801A](#)

目次

A	正誤表	1
B	質問への回答・補足説明	4
C	「はじめに」への補足	5
D	各節への補足説明	7
E	カントロヴィッチの定理	12
F	L^1 ノルムに関する最良近似多項式の一意性	21
	参考文献	24

A 正誤表

最新更新日：2024年4月2日

頁/行	訂正前	訂正後	更新日
8/-1	0.12508	0.012508	2022.04.08
20/1	\geq	$>$	2015.01.26
37/-4	G_k は, $\mathbf{g}_k = P_{n-1} \cdots P_{k+1} \mathbf{f}_k = (l_i) \in \mathbb{R}^n$ (2.45) に対応する	$G_k = (l_{i,j})$ は, $P_{n-1} \cdots P_{k+1} \mathbf{f}_k$ (2.45) に対応する	2013.08.27
49/-6	($p = \infty$ のときは $1/p = 0$ と解釈する)	(一般に, $r = \infty$ のときは $1/r = 0$ と解釈する)	2013.07.19
50/10	$n^{p(1/p-q)}$	$n^{p(1/p-1/q)}$	2015.01.26
50/6	$\cdots \leq \ \mathbf{x}\ _\infty^{q-p} \ \mathbf{x}\ _p^p = \ \mathbf{x}\ _p^{q-p} \ \mathbf{x}\ _p^p = \cdots$ \cdots	$\cdots \leq \ \mathbf{x}\ _\infty^{q-p} \ \mathbf{x}\ _p^p \leq \ \mathbf{x}\ _p^{q-p} \ \mathbf{x}\ _p^p = \cdots$	2013.07.19
53/10	シュワルツの不等式 (6.14) により	コーシー-シュワルツの不等式 (問題 2.2.6) により	2012.11.02
53/-10	$f(\mathbf{y})$ は有界閉集合 D 上	$f(\mathbf{y}) = \ \mathbf{y}\ $ は有界閉集合 D 上	2012.10.22
57/8	$= \max_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \alpha \ \mathbf{x}\ _\infty$	$\leq \max_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \alpha \ \mathbf{x}\ _\infty$	2017.08.04
57/-2	$\cdots = \langle U^* B U \mathbf{y}, U \mathbf{y} \rangle$	$\cdots = \langle U^* B U \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$	2013.07.19
63/5	$A_\varepsilon^{-1} \geq 0$	$A_\varepsilon^{-1} \geq O$	2015.01.26
66/8	$x_{i+1}^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega (y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$	$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega (y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$	2013.05.15
70/-3	$a_{i,i} > 0$ より	D は実対角行列なので	2017.08.04
72/-1	$x_1 = 3.65, x_2 = 2.51$	$x_1 = 3.65, x_2 = -2.45$	2013.05.23
74/9	$A_1^{-1} = \frac{1}{1324} \begin{pmatrix} 135 & 265 \\ 125 & -245 \end{pmatrix},$ $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -135 & 265 \\ 125 & 245 \end{pmatrix}$	$A_1^{-1} = \frac{1}{1324} \begin{pmatrix} 135 & 265 \\ -125 & +245 \end{pmatrix},$ $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -135 & 265 \\ 125 & -245 \end{pmatrix}$	2013.05.23
75/-3	$\ \Delta \mathbf{x}\ =$	$\ \Delta \mathbf{x}\ \leq$	2015.01.26
83/-6	$\beta_k - \alpha_k$	$\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}$	2020.06.14
86/-2	$g(x)$ を縮小写像	$g(x)$ を J における縮小写像	2015.01.26
90/4	収束数列は,	収束数列 ($\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$) は,	2013.05.23
90/6	$f \in C^2(I), f'(a) \neq 0$ を仮定して, 方程式 $f(a) = 0$ には唯一の解 $a \in I$ が存在するとする.	$f \in C^2(I)$ に対して, 方程式 $f(a) = 0$ には唯一の解 $a \in I$ が存在するとする. $f'(a) \neq 0$ を仮定する.	2012.11.18
91/7	方程式 $f(a) = 0$ には唯一の解 $a \in I$ が存在するとする.	このとき, 方程式 $f(a) = 0$ には唯一の解 $a \in I$ が存在する.	2012.11.18
106/6	で特徴づけられる.	で特徴づけられ, 確かに2次収束している.	2012.11.18
107/11	$K' = B(\mathbf{x}^0, \delta)$	$K' = B(\mathbf{x}^{(0)}, \delta)$	2012.10.22
113/9	卵型	卵形	2012.10.22

113/10	$C = \bigcup_{i,j=1}^n C_{i,j}$	$C = \bigcup_{i,j=1, i \neq j}^n C_{i,j}$	2020.06.14
115/9	$\frac{1}{\ \mathbf{u}^{(k+1)}\ } A\mathbf{u}^{(k+1)}$	$\frac{1}{\ \mathbf{u}^{(k+1)}\ } \mathbf{u}^{(k+1)}$	2021.07.13
116/9	λ_i^{-1} は A の	λ_i^{-1} は A^{-1} の	2021.07.13
136/3	$X = 1$	$X = x$	2015.01.26
140/11	$\cos^k x$	$\cos kx$	2021.07.05
140/-6	$\sin^k x$	$\sin kx$	2021.07.05
140/-4	問題 6.2.7 により, $\sin^k x$ は $\{1, \sin x, \dots, \sin kx\}$ の一次結合で表現できるので	削除	2021.07.05
141/3	$\sin^m x$ は, $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx\}$ の一次結合で	削除	2021.07.05
143/12	$(0 \leq x \leq 2)$	$(0 \leq c \leq 2)$	2013.04.07
149/7	$\ f\ _{2,w} = \int_a^b f(x) ^2 w(x) dx$	$\ f\ _{2,w} = \left(\int_a^b f(x) ^2 w(x) dx \right)^{1/2}$	2012.10.22
151/-9	$f \in C_{\text{per}}^0[-\pi, \pi]$	$f \in C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi]$	2014.02.12
155/-1	ϕ_n	$\phi_n(x)$	2015.01.26
159/-7	$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \dots$	$L_n(x) = e^x \dots$	2018.12.12
171/5	$\left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{(p-1)/p} \quad (1 \leq p < \infty)$	$1 \quad (p=1),$ $\left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{(p-1)/p} \quad (1 < p < \infty)$	2012.11.28
171/12, 13	$ f'' ^2$	$ f'' ^p$	2021.07.13
174/13	狭義単調増加関数	狭義単調減少関数	2012.11.28
177/4	$C'_p = \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{3p-1} \right)^{(p-1)/p} \quad (1 \leq p < \infty)$	$C'_1 = \frac{1}{2},$ $C'_p = \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{3p-1} \right)^{(p-1)/p} \quad (1 < p < \infty)$	2012.11.28
186/2	$h = \frac{b-a}{2n}$	$h = \frac{b-a}{n+2}$	2015.01.26
192/3	小区間 $\bar{J}_j = [x_{j-1}, x_{j+1}]$	$h = (b-a)/(2m), x_k = a + kh$ とし て, 小区間 $\bar{J}_j = [x_{2j-2}, x_{2j}]$	2020.06.14
192/4	$\tilde{S}_h(f) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1}))}{6} (h_j + h_{j+1})$	$\tilde{S}_h(f) = \sum_{j=1}^m \frac{f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}))}{6} 2h$	2020.06.14
192/7-9	なお, ... と書ける.	削除	2020.06.14
197/-1	$f \in C^0[0, 2\pi]$ が (7.70) をみたすとき	$f \in C_{\text{per}}^1[0, 2\pi]$ に対して	2014.02.12
209/-4	具体例で確認	具体例を確認	2012.11.18
208/-1	$Q_{w,2}(f)$	$Q_{w,1}(f)$	2021.06.23
212/-7	$T(x, t)$	$u(x, t)$	2014.02.12
212/-5	$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) + g(x, t)$	$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + g(x, t)$	2014.02.12
219/7	$\sqrt{(1-k)/(1+k)}$	$\sqrt{(1+k)/(1-k)}$	2014.10.13
222/-2	この場合は $\tau(t, r) = \tau(T - r, r)$	このときは $u(t+r) = u(T)$	2013.04.07

226/-7	定理 8.3.2	定理 8.3.6	2023.01.08
235/-4 236/-6	誤差の h への依存性	h の誤差への依存性	2012.11.18
239/11	誤差 h への依存性	h の誤差への依存性	2012.11.18
246/-9	$c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, c_m \lambda_m e^{\lambda_m t} \mathbf{v}_m$	$c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, c_m e^{\lambda_m t} \mathbf{v}_m$	2015.01.26
246/-7	$ c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \ \mathbf{v}_1\ _\infty, c_m \lambda_m e^{\lambda_m t} \ \mathbf{v}_m\ _\infty$	$ c_1 e^{\lambda_1 t} \ \mathbf{v}_1\ _\infty, c_m e^{\lambda_m t} \ \mathbf{v}_m\ _\infty$	2015.01.26
269/-5	$v_m = (\beta^m - \alpha^m)/(\beta - \alpha)$	$v_m = \mathbf{v}_1(\beta^m - \alpha^m)/(\beta - \alpha)$	2021.07.13
269/-4	$0 = v_{n+1} = \beta^{n+1}(1 - z^{n+1})/(\beta - \alpha)$	$0 = v_{n+1} = \mathbf{v}_1 \beta^{n+1}(1 - z^{n+1})/(\beta - \alpha)$	2021.07.13
269/-2	$\theta = \pi/(n+1)$ とおくと, $\alpha = e^{ik\theta}$, $\beta = e^{-ik\theta}$.	$\theta = \pi/(n+1)$ とおいて, $\alpha = e^{i\theta}$, $\beta = e^{-i\theta}$ と選ぶ.	2021.07.13
269/-1	$\cos k\theta$ (2箇所), $\sin k\theta$, $\sin km\theta$	$\cos \theta$ (2箇所), $\sin \theta$, $\sin m\theta$	2021.07.13
270/1	$v_m = (1/\sin(k\theta)) \sin(mk\theta)$	$v_m = \sin(m\theta)$	2021.07.13
274/-7	\mathbf{x}' (4箇所)	$\tilde{\mathbf{x}}$	2013.07.19
276/11	j が, $ v_j \geq v_i (\forall i \neq k)$ を	$j \neq k$ が, $ v_k > v_j \geq v_i $ ($\forall i \neq k, i \neq j$) を	2021.06.23
276/14	第 $i (\neq k)$ 成分に着目して, $0 = \lambda v_i = \sum_{l=1}^n a_{i,l} v_l = a_{i,k} v_k$. したがって, $ v_k > 0$ より, $a_{i,k} = 0$ である. 一方で,	削除	2021.06.23
277/21	$\liminf_{p \rightarrow \infty} \ f\ _p \leq$	$\liminf_{p \rightarrow \infty} \ f\ _p \geq$	2015.01.26
279/-14	$L_0(x) = L_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$	$L_0(x) = \frac{1}{2}x(x-1), L_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$	2013.07.19
279/6	$n \geq m$	$n > m$	2018.12.12
281/5	$\hat{h}_j = h_j + h_{j+1}$ と書くと,	削除	2020.06.14
281/6	$x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \hat{h}_j$	$x_{2j-2}, x_{2j-1}, x_{2j}, (2h)$	2024.04.02
281/8	$m-1, h_j^4 \hat{h}_j, \hat{h}_j$	$m, h^4(2h), (2h)$	2024.04.02
281/-15	$Q_{w,2}(f)$	$Q_{w,1}(f)$	2021.06.23

B 質問への回答・補足説明

頁/行	コメント	更新日
全体	例えば, $f(x) = g(x)$ ($x \in I$) のような表現は, すべて, $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ の意味で用いています.	2012.10.16

C 「はじめに」への補足

数値解析の数学理論を扱った入門書(和書)は数多くはないものの、出版されているものについては、信頼できるものが多い。例えば、

- [3] 森正武, 数値解析, 共立出版, 1973年(初版), 2002年(第2版).
- [4] 山本哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1976年(初版), 2006年(第2版).

は定番中の定番であり, 少なくとも業界内では, それぞれ, 「森」, 「山本」で通じる^{*1}. どちらも個人的で, 内容も入門書としては十分であり, 言うまでもなく, 数学的にも信頼できる^{*2}.

したがって, 「新たにもう一冊, 数値解析の入門書を執筆する必然性はあるのか」という疑問を持つことは, 自然であろう. 実際, 2010年11月に東京大学出版会のTさんから, 当時担当していた, 学部3年生向けの講義に基づいた教科書を執筆して欲しいとの依頼を受けた際には, 私はそう思った. さらに, 当該の講義は, 連立一方程式, 非線形方程式, 多項式補間, 数値積分, 常微分方程式などの, いわゆる数値計算法の定番メニューであり, 自分自身の専門である, 偏微分方程式の数値解析からは, ややずれる. 数理科学研究科内では, 一致していないにせよ, 私が一番近いところに居るので, 講義を担当しているだけで, 自分は, 本を出版する程の専門家ではないと自覚している. ということで, お断りするの筋であろう, と考えていた.

ところで, 私は, 正直に言えば, 本を一冊読みきる忍耐力が欠けている. そういう私にとっては,

- [28] G. W. Stewart, *Afternotes on Numerical Analysis*, SIAM, 1987
- [29] G. W. Stewart, *Afternotes Goes to Graduate School: Lectures on Advanced Numerical Analysis*, SIAM, 1987

のような「講義調」の本が有り難い. しかも, これらの本は薄いので, ノート感覚で持ち歩けるばかりでなく, 精神的な圧迫感も少なく, 嬉しい. それで, 薄さはともかく, これらの本の趣旨で書かれた和書があれば, それなりに役に立つのではないかと, という思いも常にあった.

それで, 数値解析の入門的な内容を講義調で説明した本であれば, 新たな一冊として加える価値があるかも知れない, ならば自分でそれをやろうというのが, 本書を執筆した理由である.

なお, 本書の執筆をお受けしてから,

- [27] L. R. Scott, *Numerical Analysis*, Princeton University Press, 2011

が出版された. 著者のL. R. Scottは, 有限要素法の L^∞ ノルムでの誤差評価で多くの良い結果を出しており^{*3}, また, 有限要素法の教科書^{*4}で有名である. この本における題

^{*1} 「人気」では及ばないかも知れないが, [1] 篠原能材, 数値解析の基礎(日新出版, 1978年)も良い本であり, 私は好きである.

^{*2} また, どちらも, 初版と第2版のいずれも味わい深いので, これらの本は, 「4冊」と数えるべきかもしれない.

^{*3} 私は以前, ある目的から, 有限要素法の L^∞ ノルムでの誤差評価を詳しく調べていたので, Scottさんの論文は, ずいぶんたくさん読んだ. 多分, 日本人の中では一番多く読んでいるであろう(最近, そうでもなくなりました(2018年12月12日追記)).

^{*4} S. C. Brenner and L. R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (3rd

材の選び方や、命題・定理の構成・記述は、私にはとても馴染みやすく、読みやすく、そしてわかりやすく、(忍耐のない私にとっては、滅多にないことだが)、一気に全部読んでしまった。何がどう良いのかを詳しく書くと長くなるので、ここでは一つだけ理由を記すと、Scottの本では、近似解法の正当性を数学的に証明することは、それを表現する不等式をできるだけ具体的に導出することである、との思想が一貫しており、“解析学は不等式の芸^{*5}”は数値解析学においても正しいと、あらためて納得したとだけ言っておこう^{*6}。

なお、本書を執筆するにあたり、本書の後に、偏微分方程式の数値解析や関数解析に進むことを想定している。とくに、数値解析を通じて、関数解析への入門を意図している点において、本書は個性的であると思う。そして、この目的のために、

- [17] 加藤敏夫, 位相解析—理論と応用への入門, 共立出版, 2001年(復刊版)

を多いに参考にしている。現代の忙しい学生の諸君に、この本は馴染まないであろう。しかし、数値解析の話題を通じて、この加藤先生の著書の空気を少しでも感じてくれれば嬉しい。

ed.), Springer, 2007.

^{*5} 藤田宏: 私の辿った道, 明治大学理工学部研究報告(特別寄稿), 2000年3月.

^{*6} 同じ趣旨で、次の本も好きである: [30] E. Süli and D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.

D 各節への補足説明

第 1 章

- この章の内容は、極めて不完全である。有限桁での計算の問題点と、それが避けられないという事実を、簡単に述べることをのみを目的とした。浮動小数点数についての詳しい解説を意図した訳でないのでご容赦願いたい*7

第 2 章

- §2.1: この節には、クラメールの公式の導出も書いていたのだが、ページの都合で削除した。クラメールの公式の演算時間に関する話は、もちろん、ただの例え話である。
- §2.2: この節の内容（エルミート行列の性質）は、既習事項のはずだが、普段、学生と接していると、このような基本事項を“すぐに応用できるほど”良く理解している学生は少ない気がする。特に数学科の場合は、抽象的なことばかり勉強するので、具体的に行列を扱うのが苦手なのかもしれない。特に、 A^*A , AA^* の形の行列には慣れていない人が多い。

この節に限ったことではないが、既習事項の確認の際に、すごい勢いで、いろんなことを復習しているが、これは文字通り復習であって、ここで初めて勉強することを想定している訳ではない。注意して欲しい。

- §2.3: 優対角行列は、応用上は大変重要である。しかし、大学数学の標準的なカリキュラムの中では、説明する機会があまりない。既約優対角行列が正則であることの証明は、他の本よりはわかりやすいと思いたい。
- §2.4: 定理 2.4.1 の証明は、回りくどい。もっとスマートにできる。(2.19) が、どのように関係しているかを述べるために、このような証明を述べたに過ぎない。それ以上の深い意味は無い。なお、証明を見直せば、次の有名な定理を示すことができる。

定理 D.1. 定理 2.4.1 の仮定の下で、 $a_{k,k}^{(k)} = \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}$ ($1 \leq k \leq n$) が成り立つ。

- §2.5: LU 分解という名前は、lower diagonal matrix と upper diagonal matrix からきている。これを、LR 分解ということもある (left と right であろうか?)。(2.27) や (2.28) を明らかと記述している本もあるが、このように、具体的に計算した方が安心であろう。(2.30) を問題にするのを忘れていた。各自で、証明すること。
- §2.6: 「必要な行の入れ替えを先に行っておけば、LU 分解できるので、 $PA = LU$ と分解できる」と書いてある本もあるが、このように、具体的に計算した方が安心であろう。
- §2.7: “鏡映”を説明するために図を入れるべきであった。
- §2.8: 命題 2.8.5 は応用上とても有用だが、あまり、明示的に勉強する機会はないかも知れない。行列について、この命題を証明し、応用するという経験を積んで、十分に実感をもってから、関数解析でスペクトル写像定理を勉強するというのが、教育的であろう。問題 2.2.8 の出典は、T. Kato: *Estimation of iterated matrices*,

*7 齊藤宣一「数値解析」共立出版、2017 年、には多少詳しく書きました。(2020 年 6 月 14 日追記)

第3章

- §3.1: 命題 3.1.7 の証明は、丁寧に書けば、このようになると思う。
- §3.2: 標準的な数値解析の本において、行列ノルムの扱いは、やや緩いと思うので、本書では、それなりにページを費やした。

数値解析では、スペクトル半径を $\rho(A)$ と書くのが普通である。しかし、関数解析では、 $\rho(A)$ はレゾルベント集合を表し、意味が全然違う。分野によって、スペクトル半径を表す記号は、 $r(A)$, $\text{spr}(A)$, $r_\sigma(A)$ など、たくさんある*8。

多くの本では、行列ノルムを考える際に、 \max を、 \mathbb{C}^n でとっているのか、 \mathbb{R}^n としているのが不明瞭である。実害がないような気がするかも知れないが、これはちょっと危ない。というのも、実行列しか扱わないからといって、 \max を \mathbb{R}^n でとってしまうと、一般には、 $\rho(A) \leq \|A\|$ (命題 3.2.8) が成り立たない (注意 3.2.9)。もちろん、 A が対称行列なら、実害はない。関連して、注意 3.2.18 で述べた事実は興味深い。それでは、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} > \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

となるようなノルムは存在するであろうか？もし、あったら教えてください。

上で、「一般には、 $\rho(A) \leq \|A\|$ (命題 3.2.8) が成り立たない (注意 3.2.9)」と書いたが、これは正しくは「同じ方法で証明できないので、成り立つかどうかわからない」という意味である。ところが最近になって次のことに気がついた：L. R. Scott さんの 2012 年のプレプリント *Real norms are not complex* *9 で、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、

$$\rho(A) \leq \|A\| \equiv \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

が成り立つことが証明されている。この論文では、同時に、

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

も証明されている ($\|A\|$ が \mathbb{C}^n 上のベクトルノルムに従属する行列ノルムなら、この事実は良く知られる。関数解析の本を見よ)。証明はともに初等的である。(2013 年 8 月 13 日の加筆)

命題 3.2.10 や命題 3.2.17 は、Jordan の標準形を用いて証明するのが普通である。しかし、本書では、(他の場所でも) Jordan の標準形は用いていない。某 T 大の理系学生で、Jordan の標準形を講義の中で (証明をきちんと) 学んでいるのは一割程度である。そのような状況を知りながら、“Jordan の標準形を既知の事実”として扱うのは、現実的でないであろう。もちろん、Jordan の標準形を、その証明はともかくとして、一つの数学的事実として使うことを否定している訳ではない。ただ、本書ではその方針を取らなかったというだけである。

「符号条件 (2.17) を満たす既約優対角行列 A は、 $A^{-1} > O$ を満たす」は有名な命題だが、その証明には、Perron-Frobenius 固有値を使うのが普通である。本書では、連続性に着目した別証明を述べた。

*8 $r_\sigma(A)$ の σ は、spectral の “s” の積もりであろう。私は、修士論文で、 $r_\sigma(A)$ を使ったら、ある先生から「こんな自己流の記号を使ってはいけない」と注意された。しかし、この記号は、例の、K. Yosida, *Functional Analysis (Sixth Edition)*, Springer, 1980 からとった。有名な本は、意外に、ちゃんと読まれていないものだった。

*9 <http://people.cs.uchicago.edu/~ridg/lrsbib.html>

問題 3.2.23 は, T. Kato: *Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition*, Numer. Math. **2** (1960) 22–29 から採った.

- §3.3: 実用性に関しては, ヤコビ法や SOR 法などの定常反復法そのものは, 共役勾配法に代表される非定常反復法には及ばないというのが, 私の印象である. しかし, 前処理の構成や, 並列計算の際に, その基本的な考え方は, まだまだ活躍している. 一方で, 定常反復法の解析は, 収束解析のなかの典型例であり, 初学者が学ぶ価値は高い.

命題 3.3.4 は, 脚注でも述べたように, 講義を受講していた学生数名が, 私が講義で紹介した命題 (それはもっと限定的なものであった) を一般化してくれたものである. 他の, 本でみたこともないし, かなり, 有用そうなので, 本書で紹介することにした.

- §3.4: 何をどこまで説明するべきか, かなり悩んだが, 結果は, このようになった.

第 4 章

- §4.1: 基礎的なことは, 応用を勉強する際に, 簡単に復習すると, より理解が進むと思う.
- §4.2: 単純な方法は強力.
- §4.3: 一変数の関数に話を限れば, 今現在の私たちにとっては, 関数の形が既知であれば, その解を数値的に計算することは, “さほど難しくない” といっても良いと思う. なにしろ, グラフがすぐに描けるのが大きい. 描画範囲を調整することで, 求めたい解のかなり正確な近似値を得ることができる. それから, 二分法でも, ニュートン法でも適用するのが良い.
- §4.4: こういふことは, 大学のカリキュラムの中で, いつ勉強するのであろうか?
- §4.5: ニュートン法の収束, とくに, カントロヴィッチの定理とその周辺については, かなりいろいろなことが知られている. 山本哲朗先生の本 ([4]) の附録などを参照されたい. しかし, それらは, すべて (そして当たり前だが) ノルムでの収束の議論である. しかし, 多変数のニュートン法では, 反復列が局所的に,
 1. 一次的に解に収束するのか? (つまり, 一方向から近づくのか?)
 2. “渦を巻く” ように収束するのか? (つまり, 連続的に方向を変えるのか?)
 3. 表現の仕様が収束をするのか? (つまり, ランダムに方向を変えるのか?)は, 興味深い問題であるし, 応用上も重要なのではないかと思う. しかし, このような観点からの研究が, いままでどの程度なされてきたか, 良く知らない. 唯一知っているのは,

T. F. Dupont and L. R. Scott: *The power method for tensor eigenproblems and limiting directions of Newton iterates*, Numer. Linear Algebra Appl. **20** (2013) 956–971

である. この論文では, 多変数の方程式に対するニュートン法が, 局所的に一次的に解に収束するための, 方程式の条件を論じている. そして, それが, テンソル固有値問題 (tensor eigenvalue problem) の解析と密接に関わっていることを, 論じており, 大変興味深い.

多項式の根を求めることは, 本当は, 1 節分を使う予定であったが, 頁が足りなくなったので, 諦めた.

第 5 章

- §5.1: “固有値の包み込み (enclosing)” という言い方は、あまり一般的ではないかもしれないが、内容を最も良く表現していると思われるので、あえて採用した。
定理 5.1.7 は、T. Kato, *On the upper and lower bounds of eigenvalues* J. Phys. Soc. Japan 4 (1949) 334–339 にあるものの、有限次元版である*10。例えば、一松 [2] にも似たような定理 (定理 14.3) はあるが、加藤先生のこの定理が「何を仮定にして、何を結論にするか」の選択が絶妙であるという点で、最も優れていると思うので、ここで紹介した.*11
- §5.2: 他の数値解析の本にある、冪乗法の収束証明は、私は以前から馴染めなかった。具体的に、収束を不等式で証明しようとすれば、レイリー商を持ち込む必要があるだろう。そして、その方が、結局は、わかりやすいのだと思う。
- §5.3: QR 分解の連続性自体は、もっと簡単に証明を記述できる。しかし、収束の速さが、すべて、 $d_k = \|QR - Q_k R_k\|_2$ で表現できる (この量で制御できる) ことを正確に証明しようとすると、これくらいの分量が必要である。

第 6 章

- §6.1: 関数解析の入門となることを意識した。
- §6.2: ワイエルシュトラスの近似定理は、普通どこで (大学数学のカリキュラムの中のどの段階で) 勉強するのだろうか? ここでは、作用素論的な議論を経験する良い機会だと思ったので、バーンシュタイン多項式を使った証明を述べた。[18] 寺沢寛一、自然科学者のための数学概論、岩波書店、1983 年 (増訂版改版) の 144 ページには、もっと初等的な証明がある.*12
なお、 $1 \leq p < \infty$ に対して、自明な不等式

$$\|f\|_p \leq (b-a)\|f\|_\infty \quad (f \in C^0[a,b])$$

を使うと、次の事実がわかる。

命題 D.2. CT は、 $\|\cdot\|_p$ の下で、 $C^0[0,\pi]$ で稠密である。 ST は、 $\|\cdot\|_p$ の下で、 $C_{\text{bdy}}^0[0,\pi]$ で稠密である。 T は、 $\|\cdot\|_p$ の下で、 $C_{\text{per}}^0[-\pi,\pi]$ で稠密である。

- §6.3: L^1 ノルムに関する最良近似多項式の一意性の証明を述べることができなかった。この文書の §F で述べる。
- §6.4: 当初の計画では、フーリエ級数の収束について述べるつもりだったのだが、ページが足りなかった。
- §6.5: (いずれ何か書きます)

第 7 章

1. (いずれ何か書きます)

第 8 章

1. (いずれ何か書きます)

第 9 章

*10 この論文は、加藤敏夫先生の論文で、MathSciNet で検索できるものの中で、最も古いもの二編のうちの一つである。

*11 あるいは、伊理正夫：線形代数汎論、朝倉書店、2009 年の注意 5.2.13 と伊理正夫：一般線形代数、岩波書店、2003 年の注意 4.2.13 にも本質的にこの事実についての記述がある。

*12 同じ証明が、クーラント・ヒルベルトの本にもある。

1. (いずれ何か書きます)

問題の略解

1. 間違いがあれば教えてください.

参考文献と人名一覧

1. 人名の読み方で間違っているものがあれば, 教えてください.

E カントロヴィッチの定理

■ 0. 第4章の最後に、ニュートン法に対するカントロヴィッチの定理 (定理 4.5.8) を紹介したが、証明を述べることはできなかった。ここでは、その埋め合わせをしたい。ただし、以下の議論は、

- L. V. Kantorovich, and G. P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon Press, 1964 [MR0213845]

の第 XVIII 章の焼き直しである。^{*13}

■ 1. まずは、準備として、二次方程式に対する命題を2つ述べる。

命題 E.1. 2次方程式

$$f(x) = px^2 - 2x + 2q = 0, \quad p > 0, q > 0, 2pq \leq 1 \quad (\text{E.1})$$

には、正の2根

$$a = \frac{1 - \sqrt{1 - 2pq}}{p} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2pq}}{p} = a^*$$

が存在する。 $h = pq$ とおく。初期値を $x_0 = 0$ として、 $f(x) = 0$ に簡易ニュートン法 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ を適用する。このとき、

$$0 \leq a - x_k \leq \frac{q}{h} \left(1 - \sqrt{1 - 2h}\right)^{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.2})$$

が成り立つ (ただし、 $h = 1/2$ のときには、この不等式から収束の速さについての情報はわからない)。

証明. $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x + f(x)/2$ とおく。まず、 $x_1 = g(x_0) = q > 0 = x_0$ である。また、 $g'(x) = 1 + (2px - 2)/2 = px$ なので、 $g(x)$ は $x > 0$ で狭義単調増加。したがって、 $x_0 < a$ より、 $x_1 = g(x_0) < g(a) = a$ 。これらを合わせて、 $x_0 < x_1 < a$ 。再び単調性により、 $g(x_0) < g(x_1) < g(a) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < a$ 。すなわち、 $\{x_k\}_{k \geq 0}$ は狭義単調増加列 ($x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots$) であり、かつ、上に有界 ($x_k < a$) である。ゆえに、極限 $a' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq a$ が存在するが、 $g(x)$ の連続性により、 a' は $a' = g(a')$ を満たす。ところが、 a の定義により、 $a' = a$ でなければならない。次に、 x_k の a への近づき方についてももう少し詳しく調べてみよう。テーラーの定理と $0 \leq g'(x) = px \leq pa$ ($0 \leq x \leq a$) により、

$$\begin{aligned} a - x_k &= g(a) - g(x_{k-1}) = \int_0^1 g'(x_{k-1} + s(a - x_{k-1}))(a - x_{k-1}) ds \\ &\leq qa(a - x_{k-1}) = (1 - \sqrt{1 - 2pq})(a - x_{k-1}). \end{aligned}$$

したがって、

$$0 \leq a - x_k \leq (1 - \sqrt{1 - 2pq})^k (a - x_0)$$

という収束の速さについての評価式が得られる。これは、(E.2) に他ならない。□

命題 E.2. 2次方程式 (E.1) を考え、初期値を $x_0 = 0$ として、 $f(x) = 0$ にニュートン法 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ を適用する。このとき、

$$0 \leq a - x_k \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{q}{h} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.3})$$

^{*13} なお、以下で直接は参照しないが、「山本哲朗：2点境界値問題の数理，コロナ社，2006年」も役に立つ。

が成り立つ。 $h < 1/2$ のときには、確かに 2 次収束しているが、 $h = 1/2$ のときには、線形収束しか保証されない。このとき、実際に、 $f'(a) = 0$ となっている。

証明. $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ とおく。命題 E.1 の証明と同様にして、 $\{x_k\}_{k \geq 0}$ は上に有界な単調増列となることが示せる。したがって、 $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ である。

$$c_k = -\frac{1}{f'(x_k)}, \quad q_k = c_k f(x_k), \quad p_k = c_k f''(x_k) = 2pc_k, \quad h_k = p_k q_k$$

と定義する。このとき、 $x_{k+1} - x_k = q_k$ ($k = 0, 1, \dots$) が成り立つ。 f は 2 次関数なので、 $f^{(3)} \equiv 0$ であることに注意して、 $f(t_{k-1} + q_{k-1})$ にテーラーの定理を適用すると、

$$\begin{aligned} q_k &= c_k f(x_k) = c_k f(x_{k-1} + q_{k-1}) \\ &= c_k \left[f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})q_{k-1} + \frac{1}{2}f''(x_{k-1})q_{k-1}^2 \right] \\ &= c_k \left[\frac{q_{k-1}}{c_{k-1}} - \frac{q_{k-1}}{c_{k-1}} + pq_{k-1}^2 \right] \\ &= c_k K q_{k-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{c_k}{c_{k-1}} \cdot 2pc_{k-1}q_{k-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{c_k}{c_{k-1}} p_{k-1}q_{k-1}^2. \end{aligned}$$

これと、

$$\frac{c_{k-1}}{c_k} = \frac{f'(x_k)}{f'(x_{k-1})} = \frac{f'(x_{k-1}) + f''(x_{k-1})q_{k-1}}{f'(x_{k-1})} = 1 - p_{k-1}q_{k-1} = 1 - h_{k-1}$$

を合わせて、

$$q_k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_{k-1}} p_{k-1}q_{k-1}^2 = \frac{q_{k-1}}{2} \cdot \frac{h_{k-1}}{1 - h_{k-1}} \quad (\text{E.4})$$

を得る。また、

$$p_k = 2pc_{k-1} \cdot \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{p_{k-1}}{1 - h_{k-1}}$$

より、

$$h_k = p_k q_k = \frac{1}{2} \frac{p_{k-1}q_{k-1}h_{k-1}}{(1 - h_{k-1})^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{k-1}}{1 - h_{k-1}} \right]^2. \quad (\text{E.5})$$

を得る。ここで、 $0 < h = h_0 \leq 1/2$ より、この式を用いて、 $h_1 \leq 1/2$ 。したすなわち、帰納的に $h_k \leq 1/2$ ($k = 0, 1, \dots$) という粗い評価が得られる。したがって、(E.4) と (E.5) により、

$$q_k \leq h_{k-1}q_{k-1}, \quad h_k \leq 2h_{k-1}^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (\text{E.6})$$

となる。後ろの不等式により、より精密な評価 $h_k \leq \frac{1}{2}(2h)^{2^k}$ が得られから、これを使って、

$$q_k \leq h_{k-1}q_{k-1} \leq h_{k-1}h_{k-2}q_{k-2} \leq \dots \leq h_{k-1}h_{k-2} \dots h_0q_0 \leq \frac{1}{2^k}(2h)^{2^k-1}q.$$

ここで、 $m - 1 > k$ とする。

$$\begin{aligned} 0 < x_m - x_k &= (x_m - x_{m-1}) + \dots + (x_{k+1} - x_k) = q_{m-1} + \dots + q_k \\ &\leq \frac{1}{2^k}(2h)^{2^k-1}q \left[\frac{1}{2^{m-1-k}}(2h)^{2^{m-1}-2^k} + \dots + 1 \right] \\ &\leq \frac{1}{2^k}(2h)^{2^k-1}q \left[\frac{1}{2^{m-1-k}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2^k}(2h)^{2^k-1}q \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{2^{m-k}} \right). \end{aligned}$$

この式で $m \rightarrow \infty$ とすれば、(E.3) を得る。 □

■ 2. 次に、一般の反復法

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.7})$$

の収束について考察する。ただし、 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は \mathbb{R}^n の開集合 Ω 上で定義された連続関数として、 \mathbb{R}^n のノルム $\|\cdot\|$ を一つ固定する。そして、 $\mathbf{x}^{(0)} \in \Omega$ と $r > 0$ をとり、

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= B(\mathbf{x}^{(0)}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(0)}\| < r\}, \\ \bar{\Omega}_0 &= \bar{B}(\mathbf{x}^{(0)}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq r\} \end{aligned}$$

とおき、 $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ を仮定する。そして、 $\bar{\Omega}_0$ における $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ の不動点

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0 \quad (\text{E.8})$$

を計算することを考える。なお、 $\lim = \lim_{k \rightarrow \infty}$ と書く。

まずは、準備として、スカラー値の反復法

$$t_{k+1} = \varphi(t_k)$$

についての命題を述べる。以下、 $t_0 < t'$ とする。

命題 E.3. 関数 $\varphi \in C^0[t_0, t']$ は単調増加で $t_0 \leq \varphi(t_0)$ を満たすとする。また、方程式 $t = \varphi(t)$ の解が $[t_0, t']$ 内に存在すると仮定し、その内最小のものを t^* とする。このとき、漸化式 $t_{k+1} = \varphi(t_k)$ により $[t_0, t']$ 内の数列 $\{t_k\}_{k \geq 0}$ が定義でき、これは単調増加列、すなわち、 $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t'$ を満たす。さらに、 $t^* = \lim t_k$ となる。□

証明. $t_0 \leq t^*$ と φ の単調性により、 $t_1 = \varphi(t_0) \leq \varphi(t^*) = t^*$ 。また、仮定より、 $t_0 \leq \varphi(t_0) = t_1$ なので、 $t_0 \leq t_1 \leq t^*$ 。再び φ の単調性により、 $\varphi(t_0) \leq \varphi(t_1) \leq \varphi(t^*) \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \leq t^*$ 。これを続ければ、任意の $k \geq 0$ に対して、 $t_{k+1} = \varphi(t_k) \in [t_0, t^*] \subset [t_0, t']$ が定義できる。また、この数列は単調増加かつ有界なので、極限が存在する。すなわち、 $\lim t_k = \hat{t} \in [t_0, t^*]$ となる。 φ の連続性により、 \hat{t} は $\hat{t} = \varphi(\hat{t})$ を満たすが、 t^* の定義により、 $t^* = \hat{t}$ となる。□

命題 E.4. $\mathbf{g} \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ を仮定し、さらに、 $\varphi \in C^1[t_0, t']$ が、次の3つの条件を満たすとする：

- (M1) 方程式 $t = \varphi(t)$ の解が $[t_0, t']$ 内に存在;
- (M2) $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq \varphi(t_0) - t_0$;
- (M3) $\|D\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \varphi'(t) \quad (\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^{(0)}, t - t_0), t \in (t_0, t'])$.

このとき、方程式 (E.8) には解 \mathbf{a} が存在する。また、反復法 (E.7) により、 $\bar{\Omega}_0$ 内の点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ が定義でき、これは (E.8) の解 \mathbf{a} に収束する。さらに、 $t = \varphi(t)$ の最小の解を t^* とするとき、 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq t^* - t_k$ 。□

証明. (M1)~(M3) により、 φ は命題 E.3 の仮定をすべて満たすので、漸化式 $t_{k+1} = \varphi(t_k)$ で $[t_0, t']$ 内の単調増加数列 $\{t_k\}_{k \geq 0}$ が定義でき、 $t^* = \lim t_k$ となる。まず、

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \in \bar{\Omega}_0, \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq t_k - t_{k-1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.9})$$

が成り立つことを k に関する帰納法で示す。(M2) により、 $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq t_1 - t_0 < r$ なので、 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \Omega_0$ となる。次に、(E.9) が k で成立すると仮定する。この

とき,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \\ &= \int_0^1 D\mathbf{g}(\underbrace{\mathbf{x}^{(k-1)} + s(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})}_{=\tilde{\mathbf{x}}_s}) \cdot (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}) ds.\end{aligned}$$

ここで, (E.9) の不等式により,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}\| &\leq s\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| + \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k-2)}\| + \cdots + \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \\ &\leq s(t_k - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_{k-2}) + \cdots + (t_1 - t_0) \\ &= \underbrace{t_{k-1} + s(t_k - t_{k-1})}_{=\tilde{t}_s} - t_0\end{aligned}$$

が成り立つので, (M3) が使えて,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| &\leq \int_0^1 \|D\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\| \cdot \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| ds \\ &\leq (t_k - t_{k-1}) \int_0^1 \varphi'(\tilde{t}_s) ds \\ &= (t_k - t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) \frac{dt}{t_k - t_{k-1}} \\ &= \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = t_{k+1} - t_k.\end{aligned}$$

一方, 早速この不等式を用いて,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| &\leq \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| + \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| + \cdots + \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \\ &\leq (t_{k+1} - t_k) + (t_k - t_{k-1}) + \cdots + (t_1 - t_0) \\ &= t_{k+1} - t_0 \leq t^* - t_0 \leq r.\end{aligned}$$

すなわち, (E.9) は $k+1$ のときも成立し, したがって, 帰納的に任意の $k \geq 1$ に対して成立する.

次に, $k > m$ とすると, (E.9) を用いて,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(m)}\| &\leq \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| + \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k-2)}\| + \cdots + \|\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)}\| \\ &\leq (t_k - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_{k-2}) + \cdots + (t_{m+1} - t_m) = t_k - t_m.\end{aligned}$$

この右辺は, $m, k \rightarrow \infty$ の際に 0 に収束するので, 結果的に, $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ は, $\bar{\Omega}_0$ のコーシー列となる. したがって, $\bar{\Omega}_0$ の完備性により, 極限 $\mathbf{a} = \lim \mathbf{x}^{(k)} \in \bar{\Omega}_0$ が存在し, \mathbf{g} の連続性により, \mathbf{a} は, $\mathbf{a} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ を満たす. \square

命題 E.5. 命題 E.5 の仮定に加えて, 次を仮定する:

(M4) $\varphi(t) \leq t'$, かつ, 方程式 $t = \varphi(t)$ には $[t_0, t']$ 内に一意な解 t^* が存在.

このとき, 方程式 (E.8) の解 \mathbf{a} は一意であり, 他の初期値 $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \Omega_0$ から始めても, 反復法 $\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)})$ で $\bar{\Omega}_0$ 内の点列 $\{\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ が生成でき, これも \mathbf{a} に収束する. \square

証明. 数列 $\{\tilde{t}_k\}_{k \geq 0}$ を漸化式 $\tilde{t}_{k+1} = \varphi(\tilde{t}_k)$, $\tilde{t}_0 = t'$ で定義する. $t^* \leq \tilde{t}_0 = t'$ なので, φ の単調増加性と (M4) により, $\varphi(t^*) \leq \varphi(\tilde{t}_0) = \varphi(t') \Leftrightarrow t^* \leq \tilde{t}_1 \leq t' = \tilde{t}_0$. これよりさらに, $\varphi(t^*) \leq \varphi(\tilde{t}_1) \leq \varphi(\tilde{t}_0) \Leftrightarrow t^* \leq \tilde{t}_2 \leq \tilde{t}_1$. したがって, $\{\tilde{t}_k\}_{k \geq 0}$ は単調減少かつ下から有界なので, 極限 $t^{**} = \lim \tilde{t}_k$ が存在する. φ の連続性により, t^{**} は $t^{**} = \varphi(t^{**})$ を満たすが, (M4) により, $t^{**} = t^*$ でなければならない. 次に, 命題 E.4 の証明と全く同様に

して, $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \in \bar{\Omega}_0$, $\|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \tilde{t}_k - t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) を示すことができる. これより, $\|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\| + \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq \tilde{t}_k - t_k + \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\|$ なので, $\lim \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{a}$ がわかる. 最後に, (E.8) の解の一意性を示す. そのために, もう一つの解 \mathbf{a}^* の存在を仮定する; $\mathbf{a}^* = \mathbf{g}(\mathbf{a}^*)$. このとき, 初期値 $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{a}^*$ を用いて反復法 $\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)})$ を考えると, $\lim \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{a}^*$. ところが, 明らかに, $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{a}^*$ なので, $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$ を得る. \square

■ 3. 関数 $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考えて, 方程式

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0 \quad (\text{E.10})$$

に対する, 簡易ニュートン法

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (\text{E.11})$$

を考察する. $\mathbf{x}^{(0)} \in \Omega_0$ は初期値である.

命題 E.6. $\mathbf{f} \in C^2(\bar{\Omega}_0)^n$ を仮定する. さらに, 次を満たす $\psi \in C^2[t_0, t']$ の存在を仮定する:

- (a) 方程式 $\psi(t^*) = 0$ には解 $t^* \in [t_0, t']$ が存在する;
- (b) $c_0 = -1/\psi'(t_0) > 0$;
- (c) $G_0 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})^{-1}$ が存在し, $\|G_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})\| \leq c_0 \psi(t_0)$;
- (d) $\|G_0 D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq c_0 \psi''(t)$ ($\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}^{(0)}, t - t_0)$, $t \in [t_0, t']$).

このとき, 次の3つが成り立つ:

- (i) 方程式 $\psi(t) = 0$ に対して簡易ニュートン法 (初期値 t_0) を適用すると, $[t_0, t']$ 内の数列 $\{t_k\}_{k \geq 0}$ が生成され, t^* に収束する.
- (ii) 方程式 (E.10) には解 $\mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0$ が存在する.
- (iii) 簡易ニュートン法 (E.11) により, $\bar{\Omega}_0$ 内の点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ が生成でき, $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq t^* - t_k$ を満たす. 特に, $\mathbf{a} = \lim \mathbf{x}^{(k)}$. \square

証明には次の基本的な命題を使う.

命題 E.7. Ω を \mathbb{R}^n の凸な部分集合, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ とすると, $\mathbf{f} \in C^2(\Omega)^n$ に対して,

$$\|D\mathbf{f}(\mathbf{x}) - D\mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \int_0^1 \|(D^2 \mathbf{f})(\mathbf{p}_s)\| ds \quad (\text{E.12})$$

が成り立つ. ただし, $\mathbf{p}_s = \mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. \square

証明. 本文の 94 頁で述べたように, $g \in C^1(\Omega)$ に対して,

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}) + \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{p}_s)(x_k - y_k) ds$$

が成り立つ. これを, $(\partial f_i / \partial x_j)(\mathbf{x})$ に対して適用すると,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{p}_s)(x_k - y_k) ds.$$

これより, $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を任意とすると,

$$\begin{aligned} [D\mathbf{f}(\mathbf{x}) - D\mathbf{f}(\mathbf{y})]\mathbf{u} &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{p}_s)(x_k - y_k) u_j ds \\ &= \int_0^1 (D^2 \mathbf{f}(\mathbf{p}_s))(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u}) ds. \end{aligned}$$

したがって,

$$\| [D\mathbf{f}(\mathbf{x}) - D\mathbf{f}(\mathbf{y})]\mathbf{u} \| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \int_0^1 \|(D^2\mathbf{f}(\mathbf{p}_s))\| ds.$$

両辺を $\|\mathbf{u}\|$ で割って, \mathbf{u} について \max をとれば, (E.12) を得る. \square

命題 E.6 の証明. $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - G_0\mathbf{f}(\mathbf{x})$ および $\varphi(t) = t + c_0\psi(t)$ において, これらが命題 E.4 の仮定 (M1)~(M3) を満たすことを検証すれば良い. まず, (a) により (M1) が成立. 次に, (c) により, $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) - \mathbf{x}^{(0)}\| = \|G_0\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})\| \leq c_0\psi(t_0) = \varphi(t_0) - t_0$ となり, (M2) が成り立つ. 最後に, $D\mathbf{g} = I - G_0D\mathbf{f}$, $D^2\mathbf{g} = -G_0D^2\mathbf{f}$ を用いて, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^{(0)}, t - t_0)$, $t \in (t_0, t']$ に対して, 命題 E.7 を適用して,

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{g}(\mathbf{x})\| &= \|D\mathbf{g}(\mathbf{x}) - D\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)})\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \int_0^1 \|D^2\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)} + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}))\| ds \\ &= (t - t_0) \int_0^1 \|G_0D^2\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}))\| ds \\ &\leq (t - t_0) \int_0^1 c_0\psi''(t_0 + s(t - t_0)) ds \\ &= \int_{t_0}^t c_0\psi''(z) dz \\ &= c_0\psi'(t) - c_0\psi'(t_0) = (\varphi'(t) - 1) + 1 = \varphi'(t) \end{aligned}$$

となり, (M3) の成立が確かめられた. \square

命題 E.8. 命題 E.6 の仮定に加えて, 次の仮定する:

(e) $\psi(t') \leq 0$, かつ, 方程式 $\psi(t^*) = 0$ には唯一の解 $t^* \in [t_0, t']$ が存在.

このとき, 方程式 (E.10) には唯一の解 $\mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0$ が存在する. \square

証明. 新たな条件と (b) により, $c_0\psi(t') \leq 0$ なので $\varphi(t') = t' + c_0\psi(t') \leq t'$. したがって, (M4) が成立し, 命題 E.5 が適用できる. \square

■ 4. 次に, ニュートン法

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (\text{E.13})$$

の考察に進もう.

命題 E.9. 命題 E.6 と全く同じ仮定の下で, ニュートン法 (E.13) に対しても (iii) と同じ結論が成り立つ. \square

証明. $\varphi(t) = t + c_0\psi(t)$ において, 漸化式 $t_{k+1} = \varphi(t_k)$ で生成される数列 $\{t_k\}_{k \geq 0}$ を考えると, 命題 E.4 の証明で述べたように, これは $[t_0, t']$ 内の単調増加列であり, $\psi(t^*) = 0$ の最小解 $t^* \in [t_0, t']$ に収束する.

ニュートン法の反復の第 1 回目は, 簡易ニュートン法と同じなので, 命題 E.6 により, $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \bar{\Omega}_0$ かつ $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq t_1 - t_0$ がわかる. ただし, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ において. 第 2 回目以降の反復についても, 簡易ニュートン法の結果を応用する. すなわち, 次の 4 つの条件の成立を検証すれば, $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}) \in \bar{\Omega}_0$ かつ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\| \leq t_2 - t_1$ が結論できる:

(a') 方程式 $\psi(t^*) = 0$ には解 $t^* \in [t_1, t']$ が存在する;

- (b') $c_1 = -1/\psi'(t_1) > 0$;
(c') $G_1 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})^{-1}$ が存在し, $\|G_1\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| \leq c_1\psi(t_1)$;
(d') $\|G_1D^2\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq c_1\psi''(t)$ ($\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}^{(1)}, t - t_1)$, $t \in [t_1, t']$).

順番に確かめて行こう. (a') は明らかである. $\psi''(t) \geq 0$ ($t \in [t_0, t']$), $\psi(t_0) > 0$, $\psi'(t_0) < 0$ に注意すると, 初等的な考察により,

$$\psi'(t_0) < \psi'(t) < 0 \quad (t \in (t_0, t')) \quad (\text{E.14})$$

を得る. したがって, $c_1 > 0$ なので, (b') が成り立つ.

次に, $B = I - G_0D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = -G_0[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})]$ とおくと, 命題 E.7 より,

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \int_0^1 \|G_0D^2\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + s(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}))\| ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} c_0\psi''(u) du = c_0\psi'(t_1) + 1 \equiv q \end{aligned}$$

となる. ここで, (E.14) より, $0 < q < 1$ なので, 命題 3.2.11 が応用できる. すなわち, $I - B = G_0D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})$ は正則であり,

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q} = \frac{\psi'(t_0)}{\psi'(t_1)} = \frac{c_1}{c_0}. \quad (\text{E.15})$$

特に, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})$ も正則であり, $G_1 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})^{-1} = (I - B)^{-1}G_0$ と書ける. ここで,

$$\|G_0D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| \leq c_0\psi(t_1) \quad (\text{E.16})$$

が成り立つことを示しておく. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ に (4.21) を適用した後に, G_0 を作用させると,

$$\begin{aligned} G_0\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) &= \underbrace{G_0\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})}_{=\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}} + \underbrace{G_0D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})}_{=I} \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) + \\ &\quad \int_0^1 (1 - s)G_0D^2\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + s(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}))(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) ds. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \|G_0\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| &\leq \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|^2 \int_0^1 (1 - s)\|G_0\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + s(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}))\| ds \\ &\leq (t_1 - t_0)^2 \int_0^1 (1 - s)c_0\psi''(t_0 + s(t_1 - t_0)) ds \\ &= (t_1 - t_0)^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1 - u}{t_1 - t_0} c_0\psi''(u) \frac{du}{t_1 - t_0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} c_0(t_1 - u)\psi''(u) du. \end{aligned}$$

$\psi(t)$ に対しても, テイラーの定理に適用すると,

$$\begin{aligned} c_0\psi(t_1) &= \underbrace{c_0\psi(t_0)}_{=t_1 - t_0} + \underbrace{c_0\psi'(t_0)}_{=-1}(t_1 - t_0) \\ &\quad + \int_0^1 (1 - s)c_0\psi''(t_0 + s(t_1 - t_0))(t_1 - t_0)^2 ds \end{aligned}$$

なので, 上と同じ変数変換を行うと,

$$c_0\psi(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} c_0(t_1 - u)\psi''(u) du$$

を得る。これらを合わせると、(E.16) が証明できたことになる。そして、(E.15) と (E.16) を用いると、

$$\begin{aligned}\|G_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| &= \|(I - B)^{-1} G_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| \leq \|(I - B)^{-1}\| \cdot \|G_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\| \\ &\leq \frac{c_1}{c_0} \cdot c_0 \psi(t_1) = c_1 \psi(t_1)\end{aligned}$$

となり、(c') が確かめられた。

(d') を検証するために、 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}\| \leq t - t_1$, $t \in [t_1, t']$ を仮定すると、 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}\| + \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq (t - t_1) + (t_1 - t_0) \leq t - t_0$ かつ $t \in [t_0, t']$ が成り立つ。したがって、元々の (d) が使えて、

$$\begin{aligned}\|G_1 D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\| &= \|(I - B)^{-1} G_0 D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \\ &= \|(I - B)^{-1}\| \cdot \|G_0 D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \frac{c_1}{c_0} \cdot c_0 \psi''(t) = c_1 \psi''(t).\end{aligned}$$

すなわち、(d') が成り立つことが分かった。

以上により、すでに述べたように、 $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}) \in \bar{\Omega}_0$ かつ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\| \leq t_2 - t_1$ が結論できるが、この議論を続ければ、帰納的に、 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \in \bar{\Omega}_0$ かつ $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq t_{k+1} - t_k$ ($k = 0, 1, \dots$) がわかる。

この点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ が $\bar{\Omega}_0$ のコーシー列となることは、命題 E.4 の証明と同様に確かめることができる。したがって、極限 $\mathbf{a} = \lim \mathbf{x}^{(k)}$ が存在する。ニュートン法の反復により、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}$ なので、この式で $k \rightarrow \infty$ とすれば、 $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ を得る (\mathbf{f} は C^2 級なので、この極限操作は正当)。□

■ 5. ここまでの考察をまとめることで、カントロヴィッチの定理を述べることができる。

定理 E.10 (カントロヴィッチ). $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ を \mathbb{R}^n の開集合 Ω 上で定義された連続関数とする。 $\mathbf{x}^{(0)} \in \Omega$ と $r > 0$ を、 $\bar{\Omega}_0(r) = \bar{B}(\mathbf{x}^{(0)}, r) \subset \Omega$ を満たすものとする。そして、 $\mathbf{f} \in C^2(\bar{\Omega}_0(r))^n$, および、次を満たす正数 p, q の存在を仮定する：

- (1) $h = pq \leq 1/2$;
- (2) $G_0 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})^{-1}$ が存在し、 $\|G_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})\| \leq q$;
- (3) $\|G_0 D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq p$ ($\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_0(r)$).

このとき、

$$r \geq t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} q \quad (\text{E.17})$$

ならば、方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ には解 $\mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0(r)$ が存在する。そして、ニュートン法 (E.13) および簡易ニュートン法 (E.11) は、 $\bar{\Omega}_0(r)$ 内の点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ を生成し、これは \mathbf{a} に収束する。さらに、

$$r \begin{cases} < t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} q & (h < 1/2 \text{ のとき}) \\ = t^{**} (= t^*) & (h = 1/2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

ならば、 \mathbf{a} は $\bar{\Omega}_0(r)$ 内で一意である。

最後に、ニュートン法 (E.13) の収束の速さは

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{q}{h} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.19})$$

で特徴づけられる。一方、簡易ニュートン法 (E.11) の収束の速さは、条件 $h < 1/2$ の下で、

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq \left(1 - \sqrt{1 - 2h}\right)^{n+1} \frac{q}{h} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (\text{E.20})$$

と特徴づけられる。□

証明. $\psi(t) = pt^2 - 2t + 2q$, $t_0 = 0$, および r を (E.17) を満たすものとして, これらが命題 E.6 の仮定を満たすことを確かめる. まず, 条件 (1) の下で, 2 次方程式 $\psi(t) = 0$ は, 2 つの正の根 $t^* < t^{**}$ を持つ (例 E.1) ので, (a) が成り立つ. 一方で, $\psi(t_0) = 2q$, $\psi'(t_0) = -2$, $\psi''(t) = 2p$, および (2) と (3) により, (b), (c), (d) も成立する. よって, 命題 E.9 により, ニュートン法 (E.13) は, $\bar{\Omega}_0(r)$ 内の点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ を生成し, これは $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| \leq t^* - t_k$ を満たす. ただし, $\{t_k\}_{k \geq 0}$ は, $\psi(t) = 0$ にニュートン法 $t_{k+1} = t_k - \psi(t_k)/\psi'(t_k)$ を適用して生成した数列である. 簡易ニュートン法についても全く同様である. 次に, (E.18) を満たすように, r を選べば, $\psi(t') = \psi(r) \leq 0$ なので, 命題 E.8 の条件 (e) が満たされ, $\mathbf{a} \in \bar{\Omega}_0(r)$ は一意となる. 最後に, 命題 E.2 で調べたように,

$$0 \leq t^* - t_k \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{q}{h} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

である. これと上に書いた不等式より, (E.19) が導かれる. 同様に, 命題 E.1 の結果から, (E.20) がわかる. □

F L^1 ノルムに関する最良近似多項式の一意性

6.3 節において、任意の連続関数 f と任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して、 f の L^p ノルムに関する n 次の最良近似多項式の存在を証明した (定理 6.3.2). また、 $1 < p \leq \infty$ のとき、その最良近似多項式は一意的であることも証明した (定理 6.3.5 と定理 6.3.8). しかしながら、 $p = 1$ の場合の証明を述べる余裕がなかったので、ここでその埋め合わせをしたい. この証明は、あまり経験する機会のない、 L^1 ノルムの取り扱いを勉強する上で、格好の教材となるであろう.

$[a, b]$ を有界閉区間とする. 任意の $f \in C^0[a, b]$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\|f - p^*\|_1 \leq \|f - q\|_1 \quad (q \in \mathcal{P}_n)$$

を満たす $p^* \in \mathcal{P}_n$ を、 f の L^1 ノルムに関する n 次の最良近似多項式と呼ぶのであった. ここで、

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

は L^1 ノルム、 $C^0[a, b]$ は $[a, b]$ 上の連続関数全体の集合を、 \mathcal{P}_n は n 次以下の多項式全体の集合を表す.

関数 $g(x)$ に対して、

$$\operatorname{sgn} g(x) = \begin{cases} 1 & (g(x) > 0) \\ 0 & (g(x) = 0) \\ -1 & (g(x) < 0) \end{cases}$$

と定義する (符号関数). このとき、

$$|g(x)| = g(x) \operatorname{sgn} g(x) \tag{F.1}$$

が成り立つ.

命題 F.1. $n \in \mathbb{N}$, $p^* \in \mathcal{P}_n$, $f \in C^0[a, b]$ として、 $K = \{x \in [a, b] \mid f(x) = p^*(x)\}$ と定める. そして、

$$K = \{x_1, \dots, x_m\} \neq \emptyset \quad (x_i \in [a, b], x_i \neq x_j) \tag{F.2}$$

の形を仮定する. このとき、次の (i) と (ii) は同値である.

- (i) p^* は f の L^1 ノルムに関する n 次の最良近似多項式である.
- (ii) $s = \operatorname{sgn}(f - p^*)$ と定めると、

$$\int_a^b s(x)r(x) dx = 0 \quad (r \in \mathcal{P}_n) \tag{F.3}$$

が成り立つ.

証明. (i) \Rightarrow (ii) の証明. $p^* \in \mathcal{P}_n$ を $f \in C^0[a, b]$ の L^1 ノルムに関する n 次の最良近似多項式として、

$$\exists r \in \mathcal{P}_n \quad \text{s.t.} \quad \eta = \int_a^b s(x)r(x) dx \neq 0 \tag{F.4}$$

を仮定して矛盾を導く. 一般性を失うことなく、 $\eta > 0$ の場合を考える. また、 r の代わりに、 $r/\|r\|_\infty$ を考えることで、 $\|r\|_\infty = 1$ としてよい. $\theta > 0$ に対して、

$$K_\theta = \{x \in [a, b] \mid 0 < |f(x) - p^*(x)| \leq \theta\}, \quad K' = [a, b] \setminus (K_\theta \cup K)$$

と定義する. f, p^* の連続性により,

$$\int_{K_\theta} dx \leq \frac{\eta}{2} \quad (\text{F.5})$$

を満たす θ が存在する. 以下このような θ を一つ固定する. 実はこのとき, 関数 $p^* + \theta r \in \mathcal{P}_n$ は,

$$\|f - (p^* + \theta r)\|_1 < \|f - p^*\|_1 \quad (\text{F.6})$$

を満たす. しかし, これは, p^* が最良近似多項式であることに矛盾し, (F.3) が証明できるわけである.

(F.6) を確かめるために,

$$\begin{aligned} \|f - (p^* + \theta r)\|_1 &= \int_a^b |f - (p^* + \theta r)| dx \\ &= \int_K |\cdots| dx + \int_{K_\theta} |\cdots| dx + \int_{K'} |\cdots| dx \\ &= \int_{K_\theta} |\cdots| dx + \int_{K'} |\cdots| dx \end{aligned}$$

と分解する.

- $x \in K_\theta$ のときは, $|s(x)r(x)| \leq 1$ より, $2 - s(x)r(x) \geq 1$ なので,

$$\begin{aligned} |f(x) - (p^*(x) + \theta r(x))| &\leq |f(x) - p^*(x)| + \theta |r(x)| \\ &\leq |f(x) - p^*(x)| + \theta \\ &\leq |f(x) - p^*(x)| + \theta(2 - s(x)r(x)). \end{aligned}$$

- $x \in K'$ のときは, $f(x) - p^*(x) - \theta r(x)$ と $f(x) - p^*(x)$ は同符号となる (確かめよ). したがって, (F.1) を使って,

$$\begin{aligned} |f(x) - p^*(x) - \theta r(x)| &= (f(x) - p^*(x) - \theta r(x)) \operatorname{sgn}(f(x) - p^*(x) - \theta r(x)) \\ &= (f(x) - p^*(x) - \theta r(x)) \underbrace{\operatorname{sgn}(f(x) - p^*(x))}_{=s(x)} \\ &= (f(x) - p^*(x))s(x) - \theta r(x)s(x) \\ &= |f(x) - p^*(x)| - \theta r(x)s(x). \end{aligned}$$

これらを合わせて, さらに, (F.5) を使うと,

$$\begin{aligned} \|f - (p^* + \theta r)\|_1 &\leq \int_{K_\theta} |f(x) - p^*(x)| dx + \theta \int_{K_\theta} (2 - s(x)r(x)) dx \\ &\quad + \int_{K'} |f(x) - p^*(x)| dx - \theta \int_{K'} s(x)r(x) dx \\ &= \int_a^b |f(x) - p^*(x)| dx + 2\theta \int_{K_\theta} dx - \theta \int_a^b s(x)r(x) dx \\ &< \int_a^b |f(x) - p^*(x)| dx + 2\theta \frac{\eta}{2} - \theta\eta = \|f - p^*\|_1. \end{aligned}$$

すなわち, (F.6) が示せた.

(ii) \Rightarrow (i) の証明. 次に, (F.3) を仮定して, p^* が最良近似多項式となることを示す. $q \in \mathcal{P}_n$ を任意として, $p = p^* - q \in \mathcal{P}_n$ と定める. 自明な不等式

$$\int_a^b s(x)(f(x) - q(x)) dx \leq \int_a^b |f(x) - q(x)| dx$$

を使う。すなわち,

$$\begin{aligned} \|f - q\|_1 &\geq \int_a^b s(x)(f(x) - q(x)) dx \\ &= \int_a^b s(x)(f(x) - p^*(x)) dx + \underbrace{\int_a^b s(x)p(x) dx}_{(\text{F.3}) \text{ より } 0} = \|f - p^*\|_1. \end{aligned}$$

これは, p^* が最良近似多項式であることを意味している。□

命題 F.2. p^* が $f \in C^0[a, b]$ の L^1 ノルムに関する n 次の最良近似多項式ならば, 関数 $e = f - p^*$ は, $e \equiv 0$ でない限りは, $n + 1$ 個 (以上) の点において符号変化を起こす。

証明. 関数 $e = f - p^* \neq 0$ が $m (\leq n)$ 個の点 x_1, \dots, x_m でしか符号変化を起こさないと仮定して矛盾を導く。 $s(x) = \text{sgn } e(x) (\neq 0)$, $r(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m)$ とおくと, これらの符号変化の場所は完全に一致するので, 関数 $s(x)r(x) (\neq 0)$ は, $[a, b]$ 上で定符号, すなわち, $s(x)r(x) \geq 0$ か $s(x)r(x) \leq 0$ となる。したがって, 特に,

$$\int_a^b s(x)r(x) dx \neq 0$$

であるが, 定義により, $r \in \mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_n$ なので, これは (F.3) に反し, 矛盾である。(e が一度も符号変化を起こさない場合も同様である。) □

定理 F.3. 任意の $f \in C^0[a, b]$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, f の L^1 ノルムに関する n 次の最良近似多項式 p^* が一意的に存在する。

証明. 存在は既知なので (定理 6.3.2), 一意性を確かめる。 q^* と r^* が異なる二つの最良近似多項式であると仮定する。すなわち,

$$q^*, r^* \in \mathcal{P}_n, \quad q^* \neq r^*, \quad d = \|f - q^*\|_1 = \|f - r^*\|_1 \leq \|f - q\| \quad (q \in \mathcal{P}_n) \quad (\text{F.7})$$

を仮定する。このとき, $p^* = (q^* + r^*)/2 \in \mathcal{P}_n$ と定義すると, これも最良近似多項式となる。実際,

$$\begin{aligned} d &\leq \|f - p^*\|_1 = \int_a^b \left| \frac{1}{2}(f(x) - q^*(x)) + \frac{1}{2}(f(x) - r^*(x)) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f(x) - q^*(x)| dx + \frac{1}{2} \int_a^b |f(x) - r^*(x)| dx \quad (\text{F.8}) \\ &= \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d. \end{aligned}$$

すなわち, $d = \|f - p^*\|_1$ であり p^* も最良近似多項式となる。特に, (F.8) の不等号は等号で成立していることになる。したがって, (登場する関数はすべて連続関数なので)

$$|f(x) - p^*(x)| = \frac{1}{2}|f(x) - q^*(x)| + \frac{1}{2}|f(x) - r^*(x)| \quad (x \in [a, b]) \quad (\text{F.9})$$

を得る^{*14}。 p^* は, n 次の最良近似多項式なので, 命題 F.2 により, $f - p^*$ は, (少なくとも) $n + 1$ 個の点 x_0, \dots, x_n で 0 になる。このとき, (F.9) により, $q^*(x_i) = r^*(x_i) = 0$ ($i = 0, \dots, n$) である。すなわち, n 次多項式 $q^*(x) - r^*(x)$ は $n + 1$ 個の点で 0 になる。したがって, $q^* \equiv r^*$ となるが, これは矛盾である。□

^{*14} $\phi_1, \phi_2 \in C^0[a, b]$ に対して, 一般には, $|\phi_1(x) + \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x)|$ ($x \in [a, b]$) である。したがって, $\|\phi_1 + \phi_2\|_1 = \|\phi_1\|_1 + \|\phi_2\|_1$ が成り立つためには, $|\phi_1(x) + \phi_2(x)| = |\phi_1(x)| + |\phi_2(x)|$ ($x \in [a, b]$) でなければならない。

参考文献

- [1] 篠原能材, 数値解析の基礎, 日新出版, 1978 年.
- [2] 一松信, 数値解析, 朝倉書店, 1982 年.
- [3] 森正武, 数値解析, 共立出版, 1973 年 (初版), 2002 年 (第 2 版).
- [4] 山本哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1976 年 (初版), 2006 年 (第 2 版).
- [5] 森正武, 数値解析と複素関数論, 筑摩書房, 1975 年.
- [6] 三井斌友, 数値解析入門: 常微分方程式を中心に, 朝倉書店, 1985 年.
- [7] 三井斌友, 常微分方程式の数値解法, 岩波書店, 2003 年.
- [8] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000 年.
- [9] 金子晃, 数値計算講義, サイエンス社, 2009 年.
- [10] 菊地文雄, 山本昌宏, 微分方程式と計算機演習, 山海堂, 1991 年.
- [11] 戸川隼人, ザ・数値計算リテラシ, サイエンス社, 1997 年.
- [12] 皆本晃弥, C 言語による数値計算入門—解法・アルゴリズム・プログラム—, サイエンス社, 2005 年.
- [13] 森正武, FORTRAN77 数値計算プログラミング, 岩波書店, 1986 年.
- [14] 杉原正顕, 室田一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店, 1994 年.
- [15] 杉原正顕, 室田一雄, 線形計算の数理, 岩波書店, 2009 年.
- [16] 岡本久, 中村周, 関数解析, 岩波書店, 2006 年.
- [17] 加藤敏夫, 位相解析—理論と応用への入門, 共立出版, 2001 年 (復刊版).
- [18] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, 1983 年 (増訂版改版).
- [19] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, 1963 (Blaisdell Pub. Co.), 1975 (Dover Publications).
- [20] P. Deuffhard and F. Bornemann, Scientific Computing with Ordinary Differential Equations, Springer, 2002.
- [21] W. Gautschi, Numerical Analysis: An Introduction, Birkhauser, 1997.
- [22] R. Kress, Numerical Analysis, Springer, 1998.
- [23] J. D. Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem, Wiley, 1991.
- [24] R. Plato, Concise Numerical Mathematics, American Mathematical Society, 2003.
- [25] M. J. D. Powell, Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press, 1981.
- [26] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer, 2000.
- [27] L. R. Scott, Numerical Analysis, Princeton University Press, 2011.
- [28] G. W. Stewart, Afternotes on Numerical Analysis, SIAM, 1987.
- [29] G. W. Stewart, Afternotes Goes to Graduate School: Lectures on Advanced Numerical Analysis, SIAM, 1987.
- [30] E. Süli and D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.